Werner Blum, Kassel

Einige allgemeine Fragen des Analysisunterrichts am Beispiel der Ableitung der Exponentialfunktionen

Im folgenden wird zuerst ein unterrichtlicher Weg zur Ableitung der Exponentialfunktionen (inklusive Eulersche Zahl und Differentialgleichung $f' = k \cdot f$) vorgestellt. Dann werden, ausgehend von diesem Beispiel, einige allgemeine Fragen des Analysisunterrichts diskutiert, betreffend seine Ziele, das Grundverständnis der Differentialrechnung, die Rolle von Rechnern und die zugrundeliegende methodische Konzeption.

1. Ein Unterrichtsvorschlag zur Ableitung der Exponentialfunktionen

Der folgende (in wesentlichen Teilen an [3] orientierte) Vorschlag ist für Klasse 8 der AHS wie auch für HTL und HAK geeignet. Vorkenntnisse, welche Schüler mitbringen müssen, sind aus Klasse 6 die Exponentialfunktionen mit ihren wesentlichen Eigenschaften und aus Klasse 7 der Ableitungsbegriff (inklusive verschiedene Deutungen) sowie einfache Ableitungsregeln. Ein formalisierter Grenzwertbegriff wird nicht benötigt. Ziel ist die Ableitung der Exponentialfunktionen

$$\exp_b\colon x \mapsto b^x;\ x \in \mathbb{R} \qquad (b \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\})$$

(also nicht nur die Ableitung der e-Funktion $\exp_e$).

Schritt 1: Ableitung von $\exp_2$

1.1. Zuerst für $a=0,1,2,\ldots,$ dann für beliebiges a wird der Differenzenquotient umgeformt:

$$\frac{2^{a+h}-2^a}{h} = 2^a \cdot \frac{2^h-1}{h}\,.$$

1.2. Die Ableitung an 0

$$m := \exp_2'0 = \lim_{h\to 0} \frac{2^h-1}{h}$$

wird zeichnerisch und rechnerisch (Bestimmung von $\frac{2^h-1}{h}$ für kleine $|h|$ mittels Taschenrechner) zu $m \approx 0{,}693$ bestimmt.

1.3. Damit ist

$$\exp_2'a = m \cdot 2^a \text{ mit } m = \exp_2'0 \approx 0{,}693.$$

Schritt 2: Ableitung von $\exp_b$

2.1. Durch Umformung des Differenzenquotienten

$$\frac{b^{a+h}-b^a}{h} = b^a \cdot \frac{b^h-1}{h}$$

wird die Proportionalität zwischen Differenzenquotient und Funktionswert sichtbar.

2.2. Aufgrund der Vertrautheit mit Exponentialfunktionen ist plausibel, daß die Ableitung in 0, d.h. der Grenzwert

$$m_b := \exp_b' 0 = \lim_{h \to 0} \frac{b^h-1}{h}$$

existiert und $\neq 0$ ist. Diese Tatsache wird nicht bewiesen, sondern "ausgegliedert", d.h. bewußt der Anschauung entnommen.

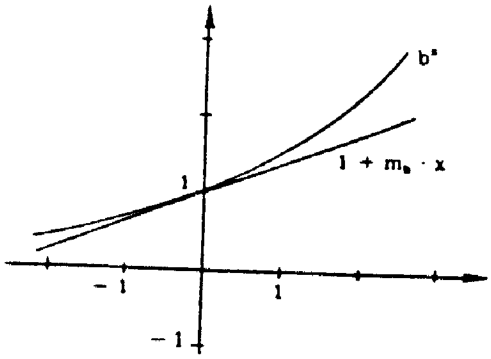

Abb.1

2.3. Damit gilt also

$$\exp_b' a = m_b \cdot b^a \text{ mit } m_b = \exp_b' 0 = \lim_{h \to 0} \frac{b^h-1}{h}$$

oder formaler $\exp_b' = m_b \exp_b$. D.h. die Ableitung von $\exp_b$ an der Stelle a ist proportional zum Funktionswert an dieser Stelle, mit der Ableitung an der Stelle 0 als Proportionalitätsfaktor.

Schritt 3: Näherungsweise Bestimmung einiger Faktoren m_b

3.1. Näherungswerte für einige m_b (etwa b = 2,5; b = 3; b = 10) können zuerst zeichnerisch bestimmt werden. Die Veränderung der Tangente in 0 und damit auch die ihrer Steigung m_b mit variierender Basis b kann auf dem Bildschirm eines Computers visualisiert werden.

3.2. Jeweils einzeln mit einem Taschenrechner oder "in Serie" mittels eines einfachen Computer-Programms können genauere Näherungswerte für einige m_b bestimmt werden, etwa $m_{2,5} \approx 0{,}916$ oder $m_3 \approx 1{,}099$.

Schritt 4: Die Eulersche Zahl e

4.1. Es erfolgt nun ein bewußter Standpunktwechsel, indem nach derjenigen (offenbar eindeutig bestimmten) Zahl $c \in \mathbb{R}^+$ gefragt wird, für die gerade $m_c = 1$ gilt. D.h. es wird diejenige Basis c gesucht, bei der die Ableitung der zugehörigen Exponentialfunktion in 0 gleich 1 ist, für die also Ableitung und Ausgangsfunktion identisch sind. Dies ist übrigens die "wahre" Bedeutung der Eulerschen Zahl!

4.2. Als Differenzierung für höhere Niveaus, d.h. in erster Linie (nur) für Realgymnasien, kann formal bewiesen werden, daß eine solche Zahl c existiert und eindeutig bestimmt ist. Beim Beweis wird aus

$$b^x = 2^{x \cdot \log_2 b}$$

durch Ableiten

$$m_b = \log_2 b \cdot m_2$$

gefolgert; aufgrund der Eigenschaften von $\log_2$ gibt es nun genau ein $c \in \mathbb{R}^+$ mit $\log_2 c = \frac{1}{m_2}$, d.h. mit $m_c = 1$.

4.3. Die Basis c mit $m_c = 1$ wird in mehreren Stufen numerisch bestimmt:

a) Durch Variieren von b wird versucht, mit $\frac{b^h-1}{h}$ für z.B. $h = 10^{-3}$ möglichst nahe an 1 heranzukommen; dies kann auch im Dialog mit einem Computer geschehen. Es ergibt sich $c \approx 2{,}718$.

b) Durch Ausnutzen der linearen Approximation $c^x \approx 1+x$ für kleine $|x|$ und Spezialisieren auf $x = \frac{1}{n}$ resultiert $c \approx (1+\frac{1}{n})^n$ für große n. Hieraus kann c dann mit Hilfe eines Rechners noch genauer bestimmt werden.

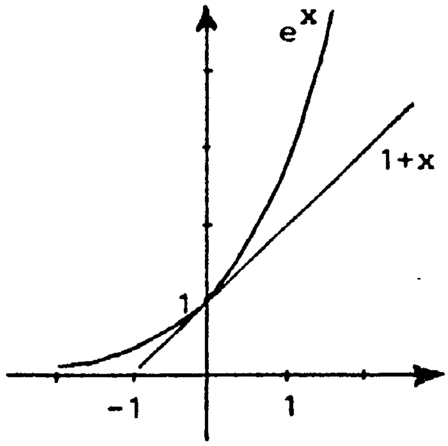

Abb.2

c) Wiederum als Differenzierung für höhere Niveaus kann diese Näherungsgleichung durch Benutzen von $c^x > 1+x$ für $x \neq 0$ und Spezialisieren auf $x = \frac{1}{n}$ und $x = -\frac{1}{n+1}$ nach einigen elementaren Umformungen zu

$$(1+\frac{1}{n})^n < c < (1+\frac{1}{n})^n + \frac{3}{n} \text{ für alle } n \in \mathbb{N}$$

präzisiert werden.

d) Schließlich wird $c = \lim_{n\to\infty} (1+\frac{1}{n})^n$ erkannt, d.h. die Zahl c wird als die bekannte Eulersche Zahl e identifiziert. Wenn e noch nicht als $\lim_{n\to\infty} (1+\frac{1}{n})^n$ eingeführt worden ist, so stellt Schritt 4.1 sogar eine Definition der Eulerschen Zahl dar.

4.4. Aus $b^x = e^{x \cdot \ln b}$ folgt sofort $m_b = \ln b$. Damit ist die Ableitungsbestimmung abgeschlossen: Es gilt also

$$\exp_b' a = \ln b \cdot b^a.$$

Schritt 5: Behandlung von $a \cdot e^{kx}$

5.1. Für $f(x) = a \cdot e^{kx}$ wird $f'(x) = k \cdot a \cdot e^{kx}$. Mit diesem Wissen können nun die schulüblichen Typen von innermathematischen Anwendungsaufgaben behandelt werden, vor allem "Kurvendiskussionen" mit Exponentialfunktionen.

5.2. Die Funktionen $x \mapsto a \cdot e^{kx}$ gestatten die Beschreibung und rechnerische Durchdringung von zahlreichen außermathematischen Anwendungssituationen, z.B. exponentielles Populationswachstum, radioaktiver Zerfall, Absorption oder exponentielles Vergessen. Dieser Schritt kann auch schon unmittelbar nach 4.1 folgen.

Schritt 6: Die Differentialgleichung $f' = k \cdot f$

6.1. Schon von Beginn an wurde die analytische Grundeigenschaft "Ableitung proportional Funktion" der Exponentialfunktionen betont, und aus 5.1 ist $f'(x) = k \cdot f(x)$ für $f(x) = a \cdot e^{kx}$ bekannt. Im Anschluß an 5.2 werden nun außermathematische Anwendungen behandelt, die durch eine solche Differentialgleichung beschrieben werden können.

6.2. In einem bewußten Niveauwechsel wird nun die Differentialgleichung $f' = k \cdot f$ zum Thema gemacht. Es werden Existenzfragen behandelt, Richtungsfelder gezeichnet und Lösungen im Richtungsfeld veranschaulicht.

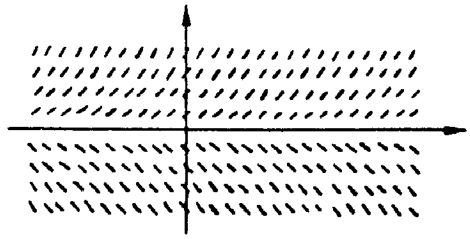

Abb. 3

6.3. Mittels Quotientenregel und Satz über Konstante wird bewiesen, daß es keine weiteren Lösungen von $f' = k \cdot f$ außer den bekannten gibt.

6.4. Als letzte Differenzierung für höhere Niveaus kann in Realgymnasien nun noch die Frage nach Lösungen von $f' = k \cdot f$ gestellt werden, wenn (vorerst) keine Vorkenntnisse über Exponentialfunktionen benutzt werden dürfen. Elementargeometrische Überlegungen am Richtungsfeld liefern bereits wesentliche Eigenschaften von Lösungen bzw. der Lösungsmenge. Durch sukzessives Ausnutzen der linearen Approximation

$$f(a+h) \approx f(a)+h \cdot f'(a) = (1+k \cdot h) \cdot f(a)$$
für kleines $|h|$

können für konkretes k mit Hilfe von Rechnern Näherungslösungen numerisch bestimmt werden.

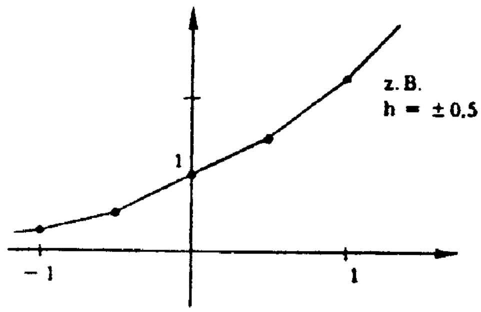

Abb. 4

Weitere mögliche, für die Schule wegen ihrer Schwierigkeit m.E. aber nicht sinnvolle höhere Differenzierungsstufen sind zum einen (vgl. Schritt 2.2) der formale Beweis der Existenz von $\exp_b 0$ (siehe dazu [3]) und zum anderen (vgl. Schritt 6.4) die formale "Neu-Definition" und Untersuchung der Exponentialfunktionen als Lösungen von $f' = k \cdot f$ (siehe dazu Abschnitt 3.2.4 in [5]).

Die eben in großen Zügen geschilderte Sequenz knüpft an das Vorverständnis der Schüler an, enthält naheliegende Stufungen und sachangemessene Standpunktverlagerungen und läßt sich durchgängig in inner- und außermathematische Fragestellungen einbetten; kurz: Sie ist "natürlich" aufgebaut im Sinne des genetischen Prinzips. Trotzdem ist dieser Weg aus verschiedenen Gründen (siehe dazu Kap. A.3, A.6 und B.1 in [5]) keineswegs schulüblich; nur das Schulbuchwerk [1] geht entsprechend vor.

Der vorgestellte Unterrichtsvorschlag läßt verschiedene allgemeine Fragen des Analysisunterrichts erkennen, die nun im folgenden thematisiert werden.

2. Einige allgemeine Fragen des Analysisunterrichts

2.1. Zu den Zielen des Analysisunterrichts

Die folgenden allgemeinen Ziele 1 - 3, die dem Unterrichtsvorschlag aus 1 zugrundeliegen, sind für alle Schularten wichtig (vgl. Kap. B.1 in [5]):

1) Der Analysisunterricht soll Schülern helfen, relevante Anwendungssituationen besser verstehen bzw. besser bewältigen zu können.

Beispiele für solche Anwendungen sind exponentielle Prozesse oder Bewegungsvorgänge. Ich werde zum (auch im Ziel 2a angesprochenen) wichtigen Thema "Anwendungen" nichts weiter sagen, sondern verweise auf die Beispiele in [7] und vor allem auf die allgemeinen Ausführungen in [2].

2) Durch Beschäftigung mit Analysis sollen formale Qualifikationen bei Schülern gefördert werden, insbesondere

a) "Metawissen" und "Übersetzungsfähigkeiten" bzgl. Anwendungen,

b) Fähigkeiten zum Argumentieren, zum "funktionalen Denken", zum "infinitesimalen Denken" oder zum "algorithmischen Denken",

c) Offenheit gegenüber Problemsituationen.

Dabei ist beim "Argumentieren" nicht in erster Linie an lückenlose formale Beweise gedacht, sondern vor allem auch an geometrische oder plausible Argumente sowie an formale lokale Deduktionen; Beispiele:
- Geometrische Begründung für Existenz und Eindeutigkeit einer Zahl c mit $m_c = 1$ (siehe 1, Schritt 4.1)
- Plausibilitätsbeweis für den Satz "Wenn f' = 0, dann f konstant".

Im Unterrichtsvorschlag enthaltene Beispiele zur Förderung und Anwendung der weiteren in 2b angesprochenen formalen Qualifikationen sind nacheinander:
- Betrachtung der Zuordnung $b \mapsto m_b$
- Numerische Bestimmung von $\exp_2 0$ via Grenzprozeß (siehe Schritt 1.1)
- Schrittweise Bestimmung von c (siehe Schritt 4.3).

3) Schüler sollen kulturhistorisch wichtige Themen aus der Analysis exemplarisch kennenlernen

Das wichtigste Beispiel hierfür ist der Grenzwertbegriff; dieser wird bei unserem Unterrichtsvorschlag im Zusammenhang mit der Untersuchung von $\lim\limits_{h \to 0} \frac{b^h - 1}{h}$ weiterentwickelt.

Die genannten Ziele implizieren insbesondere zwei Zielvorstellungen für den Analysisunterricht:

A) Schüler sollen adäquate Vorstellungen von den grundlegenden Begriffen und Methoden der Analysis aktiv aufbauen

Anders gewendet: Schüler sollen die "fundamentalen Ideen" bei den reellen Funktionen (Fischer [6] in Anlehnung an Bruner) erfassen. Z.B. sollten sich als geometrische Grundvorstellungen vom Ableitungsbegriff bei Schülern einprägen
- lokal: Tangente als "Anschmiegende" (genaueres in Abschnitt 2.2);
- global: Ableitung als Funktion, die an jeder Stelle angibt, wie steil dort der Graph der Ausgangsfunktion ist.

B) Schüler sollen einfache Begriffe, Methoden und Sätze der Analysis bei der Behandlung von inner- und außermathematischen Aufgaben begründet und verständig handhaben können

Innermathematische Beispielaufgaben hierzu aus dem Thema Exponentialfunktionen sind etwa
- Wo hat der Graph von $x \mapsto 2^x$ eine Tangente parallel zur Hauptwinkelhalbierenden?
- Bestimme angenähert $e^{0,00004}$.

Außermathematische Beispiele beziehen sich etwa auf die Mathematisierung bzw. Interpretation von Begriffen wie Wachstumsrate oder Grenzsteuersatz.

Ein weiteres allgemeines Ziel ist nur für Realgymnasien von Bedeutung:

4) Schüler sollen exemplarisch Begriffsbildungen, Beweismethoden und einen strukturellen Aufbau der Analysis als wichtiges mathematisches Teilgebiet kennenlernen

Beispiele zur Förderung solcher Ziele sind etwa:
- Formaler Beweis für Existenz und Eindeutigkeit von c (siehe Schritt 4.2)
- Aufbau eines deduktiven Gerüsts der zentralen Sätze der Differentialrechnung.

2.2. Zum Grundverständnis in der Differentialrechnung

Bei den meisten realen Problemen, bei denen Größen funktional voneinander abhängen, interessieren mittlere Änderungsraten $\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ $(x \neq a)$ der zugrundeliegenden reellen Funktion f. Für sämtliche mittleren Änderungsraten in einer kleinen Umgebung von a ist die lokale Änderungsrate $\lim\limits_{x \to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ (sofern sie existiert) eine praktisch brauchbare Näherung. Auch theoretisch ist diese Idealisierung zum Begriff der lokalen Änderungsrate von grundsätzlicher Bedeutung. Beispiele für lokale Änderungsraten sind Momentangeschwindigkeit, Stromstärke, Dichte, Empfindlichkeit, Grenzkosten oder Inflationsrate. Das den in Abschnitt 2.1 genannten Zielen entsprechende Grundverständnis der Differentialrechnung in der Schule ist deshalb die Ableitung f'(a) als Zahl, die aus einem Grenzprozeß hervorgeht und die lokale Änderungsrate von f an der Stelle a angibt. Eine schuladäquate Definition des Ableitungsbegriffs erfolgt demnach über Grenzwerte von Differenzenquotienten, nicht über stetige Ergänzung der Differenzenquotientenfunktion oder über lineare Approximation.

Dieses Grundverständnis muß von einer auf den kartesischen Graphen bezogenen angemessenen Grundvorstellung von der Ableitung unterstützt werden. Eine solche Grundvorstellung kann vermittelt werden über die Idee der sukzessiven Vergrößerung des Graphen um den betrachteten Punkt herum mithilfe eines "Funktionenmikroskops" (Kirsch [8]). Genau bei den differenzierbaren Funktionen glättet sich der Graph dabei mehr und mehr, und das Resultat dieses Prozesses ist eine Gerade, eben die Tangente im betrachteten Punkt. Die Tangente erweist sich so als diejenige Gerade, die sich dem Graphen lokal anschmiegt, d.h. unter allen Geraden am besten anpaßt. Auch das Verständnis für Nicht-Differenzierbarkeit wird hierdurch wirksam unterstützt. Der Prozeß der fortwährenden Vergrößerung kann mit Folien ([9]) oder besser noch auf dem Bildschirm eines Computers visualisiert werden.

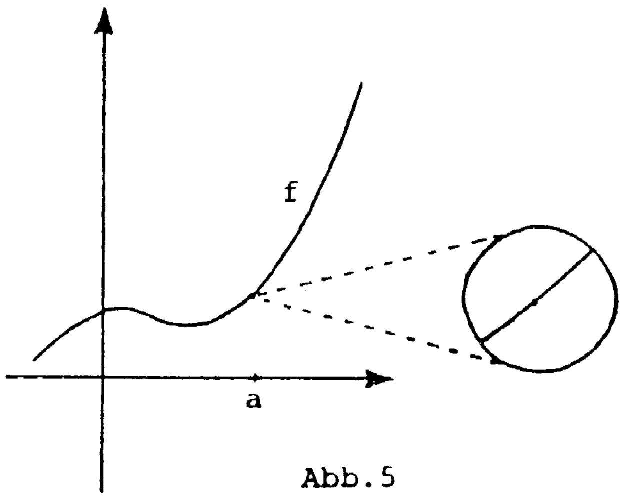

Abb.5

2.3. Zur Rolle von Rechnern im Analysisunterricht

Einige Mathematiker und Fachdidaktiker sprechen in letzter Zeit von der Notwendigkeit einer radikalen Umgestaltung oder gar - so in den USA - von der Abschaffung des Analysisunterrichts als Konsequenz aus dem immer weiteren Vordringen von Computern und - damit zusammenhängend - aus der wachsenden Bedeutung der diskreten Mathematik. Ich möchte dazu einige grundsätzliche Bemerkungen machen.

Taschenrechner bzw. Computer können im Analysisunterricht erstens als Rechen-Hilfsmittel dienen, welche den Unterricht entlasten und effektivieren sowie komplexere Probleme, auch außermathematischer Art, mit realistischeren

Daten schulzugänglich machen; Beispiele:

- Funktionswertberechnungen, insbesondere bei Polynomen mittels Horner-Schema
- Nullstellenberechnungen, insbesondere mit Intervallhalbierung, Regula Falsi oder Newtonverfahren
- Numerische Bestimmung von Extrema
- Numerische Differentiation, z.B. bei exp'0 (siehe 1, Schritt 1.2) oder bei sin'0
- Numerische Integration, insbesondere mit Trapez- oder Simpsonverfahren
- Numerische Lösung einfacher Differentialgleichungen, z.B. von $f' = k \cdot f$ (siehe Schritt 6.4).

Zweitens können Rechner als methodische Hilfsmittel eingesetzt werden, welche zur Förderung gerade der anspruchsvolleren Ziele ("Argumentieren" oder "Übersetzen", siehe 2.1) beitragen und die Aneignung mathematischer Inhalte erleichtern, deren Verstehen fördern und zu ihrem besseren Behalten beitragen können. Fast alle eben genannten Beispiele passen auch zu dieser Kategorie, etwa

- Numerische Vorbereitung und Veranschaulichung des Konvergenz-, des Ableitungs- oder des Integralbegriffs.

Weitere Beispiele:

- Definition und Berechnung der Eulerschen Zahl als Basis derjenigen Exponentialfunktion, für die exp'0 = 1 gilt (siehe Schritte 4.1 und 4.3)
- Simulationen, z.B. von exponentiellen Prozessen oder von Räuber-Beute-Systemen.

Es sollte betont werden, daß für die meisten Beispiele bereits einfache, nichtprogrammierbare Taschenrechner genügen. Eine dritte methodische Rolle von Rechnern kann natürlich nur von Computern mit Bildschirm übernommen werden, nämlich als Visualisierungs-Hilfsmittel. Durch eine (auch) bildliche Darstellung von Begriffen und Methoden der Analysis, vor allem in dynamisch-operativer Weise, sollen andere Denk- und Wahrnehmungsformen angesprochen und damit, im Zusammenspiel verschiedener Darstellungsarten, wiederum höhere Ziele sowie ein umfassenderes Verstehen und besseres Behalten von Inhalten gefördert werden. Dabei steht heute für die Schule, vor allem für komplexere Visualisierungen, z.T. auch schon entsprechende Software zur Verfügung; Beispiele:

- Zeichnen von Funktionsgraphen und Verändern von Parametern
- Veranschaulichung numerischer Algorithmen für Nullstellen oder für Integrale
- Veranschaulichung und Variation der Steigungen $\exp_b'0$ für verschiedene b (siehe 1, Schritt 3.1)
- Funktionenmikroskop (siehe 2.2)

Die Verfügbarkeit von Rechnern hat jedoch nicht nur methodische, sondern auch inhaltliche Konsequenzen. Denn dadurch, daß praxisrelevante und - entsprechend den in 2.1 genannten Zielen - auch schulrelevante diskrete Begriffe und numerische Verfahren (insbesondere auch im Zusammenhang mit Anwendungen, so vor allem bei Differentialgleichungen) nun für die Schule zugänglich sind, erhöht sich die curriculare Bedeutung dieser Themenbereiche; dasselbe gilt z.B. für Fragen der Genauigkeit von Algorithmen oder der Fehlerfortpflanzung. Dagegen werden einige schulklassische formale Kalküle dementsprechend weniger wichtig, etwa die routinemäßige Untersuchung von Funktionen auf Extrema oder Wendepunkte oder Integrationsverfahren wie Substitution oder partielle Integration. (Daß solche Kalküle auch andere wichtige Aufgaben in der Schulpraxis erfüllen, die nicht so einfach ersetzbar sind, nämlich u.a. Schülern Erfolgserlebnisse zu vermitteln, insbesondere für Klassenarbeiten, soll hier nicht diskutiert werden.)

Weitere methodische und curriculare Veränderungen im Analysisunterricht werden sich aus der Verfügbarkeit von Software für symbolisches Rechnen ergeben. Ich will hierauf in diesem Rahmen nicht eingehen.

Aufgrund der bisherigen Überlegungen sind gewisse curriculare Umschichtungen hin zu diskreten Begriffen und zu numerischen Algorithmen (vor allem im Zusammenhang mit Anwendungen) gerechtfertigt (vgl. dazu auch [10], [11] oder [12]) und ist vor allem eine konsequente methodische Nutzung von Rechnern, insbesondere schon von einfachen Taschenrechnern, als Werkzeuge im Analysisunterricht sinnvoll. Der Lehrer darf keine Angst vor Rechnern und keine irrationale Abneigung gegen sie haben, er soll sie vielmehr als wirksame Hilfen (neben anderen) auf dem Weg zu den angestrebten Unterrichtszielen betrachten.

Die bisherige rein "positive" Sichtweise der Rolle von Rechnern muß aber mit einigen weiteren Aspekten konfrontiert werden. Zum einen läßt sich ein Rechnereinsatz im Analysisunterricht nicht losgelöst von der allgemeinen Problematik möglicher Implikationen von Computern in der Schule betrachten. Ich nenne in diesem Zusammenhang exemplarisch nur die durch Computer bedingte indirekte Vermitteltheit von Lernen oder die Unterstützung einer stark instrumentell ausgerichteten Denkweise und verweise auf die erfreulicherweise mit zunehmender Intensität geführte diesbezügliche pädagogische Diskussion (siehe etwa das Friedrich-Jahresheft 1985 zum Thema "Bildschirm"). Deshalb und noch mehr bei inhaltlichen Änderungen behutsam und - gemessen an unserer Analysis-Konzeption [4] - weitgehend "systemimmanent" vorzugehen. Was das konkret bedeuten kann, habe ich durch meine Beispiele aufzuzeigen versucht.

2.4. Zur methodischen Konzeption des Analysisunterrichts

Ausgangspunkt ist die Feststellung, daß sich der Analysisunterricht (wie jeglicher Unterricht) an allgemeinen Zielen (siehe 2.1), an anerkannten methodischen Prinzipien wie dem genetischen Prinzip (und darin enthalten z.B. dem Spiralprinzip) sowie an Erkenntnissen und Erfahrungen über das Lernen jeweiliger Themen zu orientieren hat. Das bedeutet für den Analysisunterricht u.a.:

a) Anknüpfen an ein Vorverständnis von Schülern

Beispiele:
- Verwenden von inner- und außermathematischen Vorkenntnissen über Exponentialfunktionen bei deren Ableitung
- Anerkennen von geometrischem Vorwissen über Flächeninhalte als tragfähige Grundlage für Definitionen und Beweise in der Integralrechnung.

b) Stufung der Strenge, "spiralige" Vereinfachungen, insbesondere durch Wahl geeigneter Darstellungsebenen

Es ist nämlich zum Erreichen der Ziele legitim und notwendig, nicht-verfälschende Vereinfachungen vorzunehmen, d.h. zum einen einige Begriffe in einer noch nicht abschließend präzisierten Form einzuführen und zu benutzen, zum anderen bewußt Lücken im mathematischen Aufbau zu lassen. Dies geschieht vor allem durch Ausgliedern von plausiblen, genau abgegrenzten (und bei Bedarf nachlieferbaren) Definitions- und Beweisteilen, wobei der Anschauung eine große Bedeutung zukommt. Solche Stufungen sind übrigens nicht nur lernpsychologisch, sondern auch wissenschaftstheoretisch begründbar, denn "Exaktifizieren" gehört zu den "fundamentalen Ideen" ([6]) der Analysis.

Stichwortartig einige Beispiele (genaueres in [5]):
- Ausgliedern von Existenz und Eindeutigkeit von $\lim\limits_{h\to 0} \frac{b^h-1}{h}$ (siehe 1, Schritt 2.2)
- Grenzwerte als Werkzeug; Verzicht auf formale Behandlung vor der Differentialrechnung. Gestufte Entwicklung des Grenzwertbegriffs (numerisch, graphisch, verbal, algebraisch, operativ, formal) im Verlaufe der Differentialrechnung. Naives Verwenden von Rechenregeln für Grenzwerte
- Stetigkeit als Werkzeug; Verzicht auf Behandlung vor der Differentialrechnung. Verwenden des Stetigkeitsbegriffs beim ersten Auftreten (d.h. beim

müssen auch im Analysisunterricht solche allgemeinen Fragen mit Schülern thematisiert werden, d.h. muß z.B. der Charakter von Rechnern als (mächtiges, im Prinzip aber eher nebensächliches) Hilfsmittel bewußt gemacht und muß über den Sinn einer Nutzung von Rechnern gesprochen werden. Es geht hier also um einen Beitrag des Analysisunterrichts zur Entwicklung eines "Metawissens" über Rechner und einer rationalen Einstellung hierzu.

Zum zweiten muß der Stellenwert von diskreten Begriffen und von Algorithmen auch aus rein fachlichen Gründen relativiert werden (vgl. auch [11]). Denn die kontinuierlichen Begriffe, Methoden und Resultate (z.B. der Ableitungsbegriff oder der Hauptsatz) sind weiterhin unersetzlich wichtig, vor allem zum Beschreiben und Bewältigen von Anwendungssituationen (vgl. auch das in 2.2 einleitend Gesagte) wie auch zur theoretischen Absicherung von Näherungsverfahren. Dies liegt in der Natur dieser analytischen Gegenstände, an ihrem idealisierten Charakter, an ihrer historischen Genese, an ihrer denkökonomischen Struktur.

Auch aus weiteren Gründen ist Vorsicht vor allzu raschen curricularen oder methodischen Änderungen geboten. So besteht - wie bei allen schulischen Reformen - die Gefahr, daß einfach nur zusätzliche Inhalte, hier also vor allem numerische Verfahren, ins Curriculum aufgenommen werden und die ohnehin bestehende Stoffülle vergrößern. Eine andere Gefahr im Zusammenhang mit dem Einsatz von Rechnern ist die, daß Schüler dazu verleitet werden können, "harten" Begriffsbildungen durch Spielen am Rechner aus dem Weg zu gehen. Und weitere Gefahren bei Rechnern liegen - wie bei allen methodischen Hilfsmitteln - darin, daß ihre tatsächlichen Möglichkeiten überschätzt werden oder daß bei vorgelegtem Problem ein blindes Manipulieren mit ihnen an die Stelle einer geistigen Anstrengung tritt. Dagegen sind solche Mittel ja dazu da, die Aneignung von Inhalten zu erleichtern, nicht aber dazu, dem Lernenden diese Aneignung abzunehmen (dies ist prinzipiell nicht möglich), und sie sollen sich in ihrer methodischen Funktion mit der Zeit gewissermaßen selbst überflüssig machen.

Zusammenfassend möchte ich nachdrücklich vor radikalen Änderungen warnen und vielmehr vorschlagen, auf der einen Seite Rechner ohne falsche Scheu als Mittel zur methodischen Verbesserung und curricularen Weiterentwicklung des Analysisunterrichts zu nutzen, auf der anderen Seite aber bei methodischen

Beweis des Hauptsatzes oder der Produktregel) in noch unpräzisierter Form
- Festhalten genau der (bei sowieso behandelten Themen) als Hilfsmittel benötigten Sätze, d.h. Verzicht auf den Mittelwertsatz. Nur plausible und/oder geometrisch-anschauliche Begründung der zur Vollständigkeit von $\mathbb{R}$ äquivalenten Sätze: Monotonie-, Extrema- und Konstanten-Kriteria, Extremwertsatz sowie Mittelwertsatz der Integralrechnung
- Nur plausible bzw. geometrische Begründung der einfachsten Ableitungsregeln
- Ausgliedern von Existenz- und Eindeutigkeitsfragen bzgl. Bogenlängen und Flächeninhalten bei der Definition und Ableitung der Sinusfunktion
- Verzicht auf Definition von Flächeninhalten im Koordinatensystem, Ausgliedern von Existenz- und Eindeutigkeitsproblemen. Naives Verwenden von Eigenschaften von Flächeninhalten in der Integralrechnung.

Dabei werden insbesondere die erstgenannte sowie die beiden letztgenannten Vereinfachungen selbst in Realgymnasien nicht aufgehoben, sondern erst im Mathematikstudium.

c) Herstellen von Querverbindungen, insbesondere zu außermathematischen "Anwendungen"

Beispiele siehe etwa in [7].

d) Förderung von Schüleraktivitäten

Ein Beispiel aus unserem Unterrichtsvorschlag in 1 ist die arbeitsteilige Bestimmung der Konstanten m_b für verschiedene b in Schritt 3.

Selbstverständlich soll - wenn auch z.T. auf der Basis von noch vorläufigen Begriffen oder von aus der Anschauung entnommenen Sätzen - stets substantiell mathematisch argumentiert werden:

e) Argumentieren auf verschiedenen Niveaus

Schüler sollten in der Regel wissen, wann vereinfacht wird und wann nicht, und sie sollten unterscheiden können zwischen Plausibilitätsbetrachtungen und Beweisen. Das Wesentliche bei allen Vereinfachungen ist, daß nichts verfälscht und für später nichts verbaut wird. Wenn dies gewährleistet ist, ist es an geeigneten Stellen (z.B. bei der Integraldefinition) sogar legitim, Vereinfachungen stillschweigend vorzunehmen und erst bei Rückfragen von Schülern - dann natürlich - den Sachverhalt zu problematisieren und die Vereinfachung bewußt zu machen. I.a. wird dies aber bewußt vom Lehrer initiiert werden, denn neben dem Umgehen mit den wichtigsten Gegenständen der Analysis als Werkzeuge (innerhalb und außerhalb der Mathematik) soll der Schüler auch zum Weiterfragen, zu fortschreitendem Begriffsklären und Begründen angehalten werden. All dies erfordert eine Steigerung (statt - wie oft in Büchern und im Unterricht - eines Abfalls) des Argumentationsniveaus während des Vorangehens:

f) Allmähliche Steigerung des Niveaus

Die soeben aufgeführten Aspekte gelten für sämtliche Schularten. Unterschiede zwischen Realgymnasien und neusprachlichen oder humanistischen Gymnasien auf methodischer Ebene bestehen u.a.

- in der Aufhebung einiger Vereinfachungen, z.B. bei der Stetigkeit oder bei den zentralen Sätzen
- in einem höheren Anteil formaler Argumentationen, z.B. bei der Ableitung der Exponentialfunktionen
- in der Behandlung von mehr und von anspruchsvolleren Querverbindungen zu inner- und außermathematischen Gebieten

in Realgymnasien.

3. Schlußbemerkungen

Die in 2 beschriebene und in 1 am Beispiel der Ableitung der Exponentialfunktionen konkretisierte, von A. Kirsch und mir vertretene Konzeption des Analysisunterrichts ([4]) wendet sich

- einerseits gegen eine unkritische Orientierung an der Hochschulanalysis, insbesondere gegen ein überzogenes Streben nach formaler fachsystematischer Exaktheit und inhaltlicher Vollständigkeit schon im ersten Anlauf (wie es während der "Strenge-Welle" in den 70er Jahren in sehr vielen Schulbüchern zu beobachten war).
- andererseits gegen eine unsaubere Rezeptvermittlung mit höchstens scheinplausiblen Argumenten (wie es vor der "Strenge-Welle" in den 50er Jahren verbreitet war) ebenso wie gegen einen resignierenden Verzicht auf mathematisches Argumentieren angesichts eines nicht erreichbaren Uni-Niveaus.

Vielmehr versuchen wir, mit unseren Vorschlägen angemessene Niveaus dazwischen zu treffen, angemessen für Lernende, angemessen für Lehrende und angemessen bezogen auf die Ziele.

Diese Konzeption stellt genügend hohe, aber auch legitimierbare Ansprüche an Schüler. Vor allem aber stellt sie auch hohe Ansprüche an den Lehrer, an sein Urteilsvermögen, an seine Sensibilität für didaktisch relevante Unterschiede bei mathematisch Gleichwertigem, an seine inhaltliche und methodische Souveränität. Die Konzeption steht und fällt - mehr noch als andere

Konzeptionen - mit der fachlichen und didaktischen Qualifikation des Unterrichtenden. Und dies ist beileibe kein Nachteil, sondern im Gegenteil erwünscht, indem wieder die zentrale und unersetzlich wichtige Rolle des Lehrers betont wird.

Literatur

[1] Athen, H. / Griesel, H. (Hrsg.): Mathematik heute, Einführung in die Analysis 2, Grundkurs bzw. Leistungskurs. Schroedel, Hannover 1981 bzw. 1983.

[2] Blum, W.: Anwendungsorientierter Mathematikunterricht in der didaktischen Diskussion. In: Mathematische Semesterberichte 31 (1985), H.2.

[3] Blum, W. / Kirsch, A.: Elementare Behandlung der Exponentialfunktionen in der Differentialrechnung. In: Didaktik der Mathematik 5 (1977), H.4, S. 274-288.

[4] Blum, W. / Kirsch, A.: Zur Konzeption des Analysisunterrichts in Grundkursen. In: Der Mathematikunterricht 25 (1979), H.3, S. 6-24.

[5] Blum, W. / Törner, G.: Didaktik der Analysis. Vandenhoeck & Ruprecht, Göttingen 1983.

[6] Fischer, R.: Fundamentale Ideen bei den reellen Funktionen. In: Zentralblatt für Didaktik der Mathematik 8 (1976), H.4, S. 185-192.

[7] Kaiser, G. / Blum, W. / Schober, M.: Dokumentation ausgewählter Literatur zum anwendungsorientierten Mathematikunterricht. Fachinformationszentrum, Karlsruhe 1982.

[8] Kirsch, A.: Ein Vorschlag zur visuellen Vermittlung einer Grundvorstellung vom Ableitungsbegriff. In: Der Mathematikunterricht 25 (1979), H.3, S. 25-41.

[9] Kirsch, A.: Folien zur Analysis. Schroedel, Hannover 1980.

[10] Richenhagen, G.: Numerisch vs. analytisch - Überlegungen zum epistemologischen Ort der Schulanalysis. In: Mathematica didactica 6 (1983), H.1, S. 45-56.

[11] Winkelmann, B.: Veränderungen von Analysisunterricht durch Computer. Occasional Paper 29, Institut für Didaktik der Mathematik Bielefeld 1982.

[12] Winkelmann, B.: Veränderungen von Zielsetzungen des Analysisunterrichts im Computerzeitalter. In: Informatik als Herausforderung an Schule und Ausbildung (Hrsg.: Arlt, W. / Haefner, K.). Springer, Berlin 1984, S. 217-221.

Anschrift des Verfassers:

Prof. Dr. Werner Blum
Universität Gesamthochschule Kassel
Fachbereich Mathematik
Heinrich-Plett-Straße 40
D-3500 Kassel